II. *Solutio Generalis Problematis* XV. *propositi à* D. de Moivre, *in tractatu* de Mensura Sortis *inserto Actis Philosophicis Anglicanis* No 329. *pro numero quocunque Collusorum*: *per* D. Nicolaum Bernoulli, Basiliensem, Reg. Soc. Sodalem.

CUM Methodus synthetica, quâ usus est *D. de Moivre* ad inveniendam cujusque Collusoris sortem, in usum verti nequeat tunc quando plures quam tres sunt collusores, ob vix perspiciendam legem progressionis serierum quæ se offerunt; ostendam hic quo modo Analysis in ejusmodi Problematibus, ubi depositum continuo augetur, adhiberi queat: eumque in finem demonstrationem dabo analyticam trium Theorematum, quæ inveni, & quidem diu ante visum D. *Moyvræi* libellum de Mensura Sortis, occasione triplicis quæstionis mihi ab amico circa ludum hunc, quem Galli vocant *le Jeu de la Poule*, propositæ, pro inveniendis scil. probabilitate vincendi, lucro item vel damno cujusque Collusoris, & duratione certaminis.

THEOREMA 1.

Si Collusores aliquot $A, B, C, D, E,$ &c. quorum numerus est $n+1$ & dexteritates sunt æquales, deponant singuli 1, & istis conditionibus certent. 1°. Ut illorum duo A & B ludum incipiant. 2°. Ut victus locum suum tertio C cedat, ita ut ille tertius C jam cum victore contendat, quique ex hoc certamine victor evaserit cum quarto D ludat, & ita deinceps. 3°. Ut ille depositum totum obtineat, qui omnes collusores successivè vicerit. Dico probabilitates vincendi duorum quorumlibet collusorum sese immediate in ordine ludendi sequentium esse in ratione $1+2^n$ ad 2^n, adeoque expectationes lusorum $A (B)$, $C, D, E,$ &c. esse in progressione Geometrica.

Demonstratio.

Ponantur expectationes vincendi ipsius A vel $B = a$, ipsius $C = c$, ipsius $D = d$, ipsius $E = e$, &c. Porro cum accidere possit, ut collusor aliquis prima vice in ludum intrans inveniat adversarium qui vel nondum, vel semel, vel bis, vel ter, &c. jam successive victor extitit, vocetur expectatio lusoris illius primo casu $= z$, secundo $= y$, tertio $= x$, quarto $= u$, quinto $= t$, &c. Item cum collusor aliquis vinci possit ab adversario qui antea jam vel nullum, vel unum, vel duos, vel tres, &c. collusores successive vicit, ita ut exiens è ludo relinquat adversarium qui vel semel, vel bis, vel ter, vel quater &c. victor extitit, vocetur expectatio seu probabilitas vincendi ejus qui exit è ludo primo casu $= h$, secundo $= k$, tertio $= l$, quarto $= m$, &c. Hisce omnibus positis habebuntur sequentes novem series æquationum signatæ N°. 1. N°. 2. N°. 3, &c. usque ad N°. 9. *Tab.* I. Ratio eas inveniendi breviter hæc est.

Inter æquationes N. 1°. reperitur *ex. gr.* $f = \frac{1}{8}t + \frac{1}{8}u + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y$. Nam collusor F certabit vel cum collusore A, vel B, vel C, vel D, vel E: ut primum vel secundum contingat, oportet ut vel A vel B quater successive victor existat, cujus eventus probabilitas est $\frac{2}{16}$ seu $\frac{1}{8}$: Ut tertium contingat oportet ut C ter victor existat, cujus eventus probabilitas est etiam $\frac{1}{8}$: Ut quartum contingat oportet ut D bis successive vincat, quod probabilitatem habet $\frac{1}{4}$; Ut quintum contingat, oportet ut E semel vincat, cujus eventus probabilitas est $\frac{1}{2}$;

ergo lusoris F probabilitas vincendi est $= \frac{1}{8} t + \frac{1}{8} u + \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} y$. Sic inter æquationes No. 2. est, *ex. gr.* $x = \frac{1}{2} l + \overline{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \frac{1}{2^n}} \times h + \frac{1}{2^n} \times 1$. Collusor enim qui certat cum adversario qui jam bis successive victor extitit, vincere potest vel omnes collusores, vel aliquos, vel nullum. Prioris eventus probabilitas est $\frac{1}{2^n}$, secundi $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \frac{1}{2^n}$, & tertii $\frac{1}{2}$; si primus eventus contingat, probabilitas vincendi evadit certitudo integra seu 1; si secundus, exit è ludo relinquens collusorem qui semel vicit; si tertius, exit è ludo relinquens collusorem qui ter successive vicit; adeoque sors ejus totalis est $\frac{1}{2} \times l + \overline{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots \frac{1}{2^n}} \times h + \frac{1}{2^n} \times 1$. Simili ratiocinio inveniuntur æquationes N°. 3. Collusor enim qui victus ab adversario exit è ludo, relinquens *ex.gr.* collusorem unius tantum ludi victorem, acquirit sortem vel ipsius C, vel ipsius D, vel ipsius E, vel ipsius F, &c. prout adversarius à quo victus est vincit vel omnes collusores præter unum, vel omnes præter duos, vel omnes præter tres, &c. unde sequitur quod $h = \frac{1}{2^{n-1}} \times c + \frac{1}{2^{n-2}} \times d + \frac{1}{2^{n-3}} \times e + \frac{1}{2^{n-4}} \times f +$ &c. Æquationes N°. 4. inveniuntur subtrahendo æquationes N°. 2. ab invicem: & æquationes N°. 5. subtrahendo æquationes N°. 3. ab invicem. Æquationes N°. 6. inveniuntur substituendo in æquationibus N°. 4. valores inventos per æquationes N°. 5. Æquationes N°. 7. inveniuntur quærendo valores ipsarum z, y, x, u, &c. per æquationes N°. 1. Et his valoribus substitutis in æquationibus N° 4. habebuntur æquationes No. 8, quæ comparatæ cum æquationibus N°. 6.

dant æquationes N°. 9. ex quibus ſequitur quod $1+2^n . 2^n ::$
$:: a : c :: c : d :: d : e$, &c. *Q. E. D.*

Corollarium.

Hinc facile inveniuntur probabilitates vincendi ſingulorum Colluſorum, quas habent tum ante ludum inceptum, tum in quolibet ſtatu in quem ludum proſequendo pervenire poſſunt. Si ſint, *ex gr.* tres colluſores A, B, C, erit $n=2$, & $1+2^n : 2^n ::$ $5 . 4 :: a . c$: id eſt, probabilitates vincendi ipſorum A, B, C, antequam A vicerit B, vel B vicerit A, ſe habent ut numeri $5, 5, 4$, adeoque ipſæ probabilitates ſunt $\frac{5}{14}, \frac{5}{14}, \frac{4}{14}$: omnes enim ſimul ſumptæ facere debent 1 ſeu certitudinem integram. Poſtquam A vicerit B, probabilitates vincendi ipſorum B, C, A, erunt b, y ſeu c, & (quia A æqualem habet expectationem ad victoriam, & ad ſortem ipſius B obtinendam) $\frac{1+b}{2}$ reſpectivè, *hoc eſt*, quia per æq. 1. N°. 3. $b=\frac{1}{2^{n-1}}\times c=\frac{1}{2}c$, & $c=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$ ut modo inventum, hæ probabilitates erunt $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}$, ut D. *de Moivre* invenit Coroll. 1. Prop. 15. pag. 242.

Si ſint quatuor colluſores A, B, C, D, erit $n=3$, & $1+2^n . 2^n :: 9, 8$, adeoque probabilitates colluſorum ab initio ludi erunt ut $9, 9, 8, \frac{8\times 8}{9}$, ſive ut $81, 81, 72, 64$, *hoc eſt*, ipſæ a, a, c, d, erunt $\frac{81}{298}, \frac{81}{298}, \frac{72}{298}$ & $\frac{64}{298}$. Poſtquam A vicerit B, probabilitates ipſorum B, D, C, A, erunt $b, d, c, \frac{1+3b}{4}$, eſt autem per æq. 1. N°. 3. $b=\frac{1}{2^{n-1}}\times c+\frac{1}{2^{n-2}}\times d=\frac{1}{4}c+\frac{1}{2}d$,

$\bar{c} = \frac{72}{298} = \frac{36}{149}$, & $d = \frac{64}{298} = \frac{32}{149}$, ut modo inventum: ergo hæ probabilitates erunt $\frac{25}{149}$, $\frac{32}{149}$, $\frac{36}{149}$, $\frac{56}{149}$ reſpectivè. Poſtquam *A* vicerit *B* & *C*, probabilitates vincendi ipſorum *C*, *B*, *D*, *A*, erunt k, $\frac{c}{2}$, x, $\frac{1+b}{2}$, ſeu (quia per æq 2 N°. 3. $k = \frac{1}{2^{n-2}} \times d = \frac{1}{2} d$, & per æq. 3. N°. 7. $x = 2d - c$) $\frac{16}{149}$, $\frac{18}{149}$, $\frac{28}{149}$, $\frac{87}{149}$. Et nota quod calculi bonitas confirmetur ex eo, quod ſummæ harum probabilitatum, *hoc eſt*, $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}$ in priori exemplo, & $\frac{25}{149} + \frac{32}{149} + \frac{36}{149} + \frac{56}{149}$, nec non $\frac{16}{149} + \frac{18}{149} + \frac{28}{149} + \frac{87}{149}$ in poſteriori exemplo, ſingulæ ſint $= 1$ ſeu certitudini integræ.

THEOREMA II.

Poſitis quæ prius & inſuper hac conditione, ut victus ſemper mulctetur ſumma p, quæ depoſito augendo inſerviat; quod depoſitum ſic gradatim auctum illi ſoli cedat, qui omnium ſucceſſive colluſorum victor extiterit; denotatis etiam ut antea per literas minuſculas a, c, d, e, &c. probabilitatibus vincendi ipſorum *A* (vel *B*), *C*, *D*, *E*, &c. reſpectivè: per eaſdem vero literas majuſculas *A*, *C*, *D*, *E*, &c. ipſorum *A* (vel *B*), *C*, *D*, *E*, &c. expectationibus, *hoc eſt*, portionibus depoſiti quas ſinguli expectant: Dico, fore ſemper $C = \frac{\overline{A + ap} \times 2^n - ncp}{1 + 2^n}$

$D =$

$$D = \frac{\overline{C + cp} \times 2^n - ndp}{1 + 2^n},\ E = \frac{\overline{D + dp} \times 2^n - nep}{1 + 2^n},\ \&c.$$

Demonstratio.

Denotetur ut prius per literas minusculas z, y, x, u, t, &c. probabilitas vincendi ludentis cum adversario, qui jam vel nullum, vel unum, vel duos, *&c* collusores successive vicit; per easdem vero literas majusculas Z, Y, X, U, T, &c. ejus expectatio, quam scil. habet diversis illis casibus, deposito existente $n + 1$, $n + 1 + p$, $n + 1 + 2p$, $n + 1 + 3p$, &c. respective. Sic etiam per literas minusculas h, k, l, m, &c. denotetur probabilitas vincendi lusoris victi ab adversario, qui antea vel nullum, vel unum, vel duos, &c. collusores successive vicerat; quemadmodum per literas majusculas H, K, L, M, &c. ejusdem expectatio diversis illis casibus, deposito existente $n + 1 + p$, $n + 1 + 2p$. $n + 1 + 3p$, &c. respective. His positis iisdem quibus antea ratiociniis invenientur sequentes duodecim æquationum series in *Tab.* II. signatæ N°. 1. N°. 2. N°. 3, &c. Inter æquationes N°. 1. *ex. gr.* est $E = \frac{U}{4} + \frac{X + xp}{4} + \frac{Y + 2yp}{2}$. Lusor enim E ludet vel cum lusore A, vel lusore B, vel C, vel D. Si ludit cum A vel B, expectatio ejus erit $= U$, quia ludit cum adversario qui jam tres adversarios vicit, deposito existente $n + 1 + 3p$. Si ludit cum lusore C, expectatio ejus erit $= X + xp$, ludit enim cum adversario qui jam duos collusores vicit, adeoque si depositum esset $n + 1 + 2p$ ejus expectatio esset $= X$: verum quia ludente E depositum est $= n + 1 + 3p$, ob tres collusores victos & summa p mulctatos, addenda est expectationi X portio illa mulctæ unius p, quam lusor E sperare potest: est autem hæc portio (quia probabilitas ejus vincendi est x) $= xp$, ejus igitur expectatio totalis tunc erit $= X + xp$. Sic si ludit cum lusore D, expectatio ejus erit $= Y + 2yp$: additur ad Y (quæ esset ejus expectatio deposito existente $n + 1 + p$) portio $2yp$, quæ ipsi debetur de duabus

mulctis

mulctis $2p$, quibus depositum $n+1+3p$ majus est quam $n+1+p$. Simili modo habentur æquationes N°. 2. 3. 4. & 5. Substituendo autem primam æquationem N°. 2. *Tab.* I. in æquationibus N°. 4, habentur æquationes N°. 6. Et substituendo primam æquationem N°. 3. *Tab.* I. in æquationibus N°. 5. habentur æquationes. N°. 7. quibus dein in æquationibus No 6. substitutis habentur æquationes No. 8. Æquationes N° 9. inveniuntur quærendo valores ipsarum Z, Y, X, U, &c per æquationes N°. 1. *Tab.* I. & II. vel N° 2. *Tab* II. & N°. 7. *Tab.* I. Et his valoribus substitutis in æquationibus N°. 4. habentur æquationes N°. 10. Quæ comparatæ cum æquationibus N°. 8 (in quibus pro z substituatur a, per 1. æq. Tab. I.) dant æquationes N°. 11. Et hæ æquationes N°. 11. comparatæ cum æquationibus N°. 9. *Tab.* I. dant æquationes N°. 12, quæ constituunt Theorema, quod demonstrandum erat.

Corollarium.

Hinc quoque facile inveniuntur singulorum Collusorum sortes seu expectationes, ipsorumque adeo lucra vel damna. Sint *ex. gr.* tres collusores A, B, C: erit $C = \frac{\overline{A+ap} \times 2^n - ncp}{1+2^n}$ $= (\text{ob } n=2)\ \frac{4A+4ap-2cp}{5} = (\text{ob } a = \frac{5}{14}$ & $c = \frac{2}{7}$ per coroll. Theor. 1.) $\frac{4A+\frac{6}{7}p}{5}$. Unde cum omnium trium expectationes simul sumptæ, *id est*, $A+A+C$ æquare debeant id quod ab initio depositum fuit, *id est* 3, erit $2A + \frac{4A+\frac{6}{7}p}{5} = \frac{14A+\frac{6}{7}p}{5} = 3$, & $14A = 15 - \frac{6}{7}p$, & $A = \frac{15}{14} - \frac{3}{49}p =$ expectationi lusoris A vel B: proinde C expectatio lusoris tertii $C = \frac{4A+\frac{6}{7}p}{5} = \frac{6}{7} + \frac{6}{49}p$. A quibus

bus expectationibus si subtrahatur 1, id quod ab initio singuli deposuerunt, remanebit ibi $\frac{1}{14} - \frac{3}{49}p$, hic $\frac{6}{49}p - \frac{1}{7}$; quemadmodum D. *de Moivre* invenit. *Exempl.* 2. Sint collusores 4, *A, B, C, D*, erit $C = \frac{\overline{A + ap} \times 2^n - ncp}{1 + 2^n} = (\text{ob } n = 3)$ $\frac{8A + 8ap - 3cp}{9} = (\text{ob } a = \frac{81}{298}$ & $c = \frac{36}{149}$, per coroll. Theor. 1.) $\frac{8A + \frac{216}{149}p}{9}$; item $D = \frac{\overline{C + cp} \times 2^n - ndp}{1 + 2^n} = \frac{8C + 8cp - 3dp}{9} = (\text{ob } d = \frac{32}{149}$ per id. corr.) $\frac{8C + \frac{192}{149}p}{9} = \frac{64A + \frac{3456}{149}p}{81}$: unde habebitur æquatio $2A + C + D = 2A + \frac{8A + \frac{216}{149}p}{9} + \frac{64A + \frac{3456}{149}p}{9} = \frac{298A + \frac{5400}{149}p}{81} = 4$, sive $149A + \frac{2700}{149}p = 162$, & $A = \frac{162}{149} - \frac{2700}{22201}p$. Hinc $C = \frac{8A + \frac{216}{149}p}{9} = \frac{144}{149} + \frac{1176}{22201}p$, & $D = \frac{64A + \frac{3456}{149}p}{81} = \frac{128}{149} + \frac{4224}{22201}p$. Subtracta autem unitate 1, quam singuli ab initio ludi deposuerunt, remanebit $\frac{13}{149} - \frac{2700}{22201}p$ pro lusore *A* vel *B*, $\frac{1176}{22201}p - \frac{5}{149}$ pro *C*, & $\frac{4224}{22201}p - \frac{21}{149}$ pro *D*; quæ singula indigitabunt lucrum vel damnum, prout pars affirmata præpollet negatæ, vel contra. Simili ratione habebuntur etiam sortes quas acquirunt in quolibet statu in quem ludum prosequendo pervenire possunt.

THEO-

THEOREMA 3.

Pofitis quæ prius, fi adfint fpectatores Q, R, S, T, U, &c. quorum numerus fit n unitate minor quam numerus collusorum, quorumque prior Q affirmet certamen finitum iri poft $n+p$ ludos peractos, R poft $n+p-1$, S poft $n+p-2$, T poft $n+p-3$, U poft $n+p-4$, *&c* præcife, non antea; fintque q, r, s, t, u, &c. fortes ipforum Q, R, S, T, U, &c. Dico fore $q = \frac{1}{2} r + \frac{1}{4} s + \frac{1}{8} t + \frac{1}{16} u +$ &c.

Demonftratio.

Vocetur A collufor ille, qui poft $n+p$ ludos vincere fupponitur: hic intrare débet in ludum poft p ludos peractos, & tum ludet contra adverfarium, qui jam vel unum vel duos, vel tres, &c. collufores fucceffive vicit. Jam cum, ut primus cafus contingat, & ut collufor A omnes fuos collufores præter unum, *id eft*, $n-1$ collufores fucceffive vincat, æque probabile fit quam ut adverfarius ejus vincat $n-1$ collufores, *id eft*, (quia jam unius colluforis victor fuit) ut certamen finiat poft $n+p-1$ ludos peractos; hujufque eventus probabilitas fit $= r$: erit probabilitas ut collufor A unum adhuc colluforem vincat, *id eft*, certamen finiat poft $n+p$ ludos $= \frac{1}{2} r$. Sic, ut fecundus; cafus exiftat, & ut A omnes collufores præter duos vincat, æquè probabile eft quam ut certamen finiatur poft $n+p-2$ ludos, adeoque ut tunc A vincat adhuc duos collufores, *id eft*, ut certamen finiat poft $n+p$ ludos, probabilitas erit $= \frac{1}{4} s$. Eodem modo ut, tertio cafu exiftente, A vincat omnes collufores, probabilitas eft $= \frac{1}{8} t$; ut quarto $= \frac{1}{16} u$, *&c.* Quare ut

 indiffe-

indifferenter certamen finiatur post $n+p$ ludos, probabilitas est $\frac{1}{2}r+\frac{1}{4}s+\frac{1}{8}t+\frac{1}{16}u+$ &c. $=q$. *Q. E. D.*

Corollarium 1.

Facile hinc invenitur quænam sit probabilitas ut certamen finiatur intra datum quemvis ludorum numerum. Series enim fractionum incipientium à fractione $\frac{1}{2^{n-1}}$, quarum denominatores crescant in continua proportione dupla, numerator autem cujusque fractionis sit summa numeratorum tot fractionum immediate præcedentium quot sunt unitates in $n-1$, dabit omnes successive probabilitates, ut certamen finiatur peractis præcise n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ &c. ludis: & per consequens si addantur tot termini hujus seriei quot sunt unitates in $p+1$, summa ipsorum exprimet probabilitatem ut certamen finiatur ad minimum ludis $n+p$ peractis. *Ex. gr.* Si sint collusores 4, adeoque $n=3$, habebitur hæc series $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{2}{16}, \frac{3}{32}, \frac{5}{64}, \frac{8}{128}, \frac{13}{256}, \frac{21}{512}$ &c. E qua si fiat alia $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{8}{16}, \frac{19}{32}, \frac{43}{64}, \frac{94}{128}, \frac{201}{256}$, *&c.* cujus termini sint summæ terminorum præcedentis seriei, denotabunt iidem termini qualis sit probabilitas ut certamen finiatur ad minimum 3, 4, 5, 6, *&c.* ludis.

Corollarium 2.

Potest terminus quicunque prioris seriei (excepto primo termino,) ut & summa omnium terminorum, *id est*, terminus quicunque posterioris seriei, per formulam generalem exprimi hoc modo. Si $n+1$ sit numerus collusorum, & p sit numerus terminorum, erit ultimus terminus prioris seriei $\frac{1}{2^n}$

$$\frac{1}{2^n} - \frac{\overline{p-n+1}}{1\times 2^{2n}} + \frac{\overline{p-2n}\times\overline{p-2n+3}}{1\times 2\times 2^{3n}} -$$

$$-\frac{\overline{p-3n}\times\overline{p-3n+1}\times\overline{p-3n+5}}{1\times 2\times 3\times 2^{4n}} +$$

$$+\frac{\overline{p-4n}\times\overline{p-4n+1}\times\overline{p-4n+2}\times\overline{p-4n+7}}{1\times 2\times 3\times 4\times 2^{5n}}, -\&c.$$ Et ſumma omnium terminorum ſive ultimus terminus poſterioris ſeriei $= \frac{p+1}{1\times 2^n} - \frac{\overline{p-n}\times\overline{p-n+3}}{1\times 2\times 2^{2n}} + \frac{\overline{p-2n}\times\overline{p-2n+1}\times\overline{p-2n+5}}{1\times 2\times 3\times 2^{3n}}$

$$-\frac{\overline{p-3n}\times\overline{p-3n+1}\times\overline{p-3n+2}\times\overline{p-3n+7}}{1\times 2\times 3\times 4\times 2^{4n}} + \&c.$$

Tabula I.

Intrat		Exit.	
	Sors		Sors
0	z	1	h
1	y	2	k
2	x	3	l
3	u	4	m
4	t		

N°. 1

$a = z$

$c = y$

$d = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$

$e = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y$

$f = \frac{1}{8}t + \frac{1}{8}u + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y$

N°. 2.

$$z = \frac{1}{2} + \overline{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \frac{1}{2^n}} \times h + \frac{1}{2^n}\times 1$$

$$y = \frac{1}{2}k + \overline{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \frac{1}{2^n}} \times h + \frac{1}{2^n}\times 1.$$

$$x = \frac{1}{2}l + \overline{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \frac{1}{2^n}} \times h + \frac{1}{2^n}\times 1.$$

$$u = \frac{1}{2}m + \overline{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \frac{1}{2^n}} \times h + \frac{1}{2^n}\times 1$$

No. 3.

N°. 3.

$$b = \frac{1}{2^{n-1}} \times c + \frac{1}{2^{n-2}} \times d + \frac{1}{2^{n-3}} \times e + \frac{1}{2^{n-4}} \times f + \ldots$$

$$k = \frac{1}{2^{n-2}} \times d + \frac{1}{2^{n-3}} \times e + \frac{1}{2^{n-4}} \times f + \ldots$$

$$l = \frac{1}{2^{n-3}} \times e + \frac{1}{2^{n-4}} \times f + \ldots$$

$$m = \frac{1}{2^{n-4}} \times f + \ldots$$

N°. 4. N°. 6. N°. 8.

$$z - y = \frac{1}{2} h - \frac{1}{2} k \quad = \frac{1}{2^n} \times c \quad = a - c$$

$$y - x = \frac{1}{2} k - \frac{1}{2} l \quad = \frac{1}{2^{n-1}} \times d \quad = 2c - 2d$$

$$x - u = \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} m \quad = \frac{1}{2^{n-2}} \times e \quad = 4d - 4e$$

N°. 5.

$$h - k = \frac{1}{2^{n-1}} \times c$$

$$k - l = \frac{1}{2^{n-2}} \times d$$

$$l - m = \frac{1}{2^{n-3}} \times e$$

N°. 7.

$$z = a$$

$$y = c$$

$$x = 2d - y = 2d - c$$

$$u = 4e - x - 2y = 4e - 2d - e$$

N°. 9.

$$c = a \times \frac{2^n}{1 + 2^n}$$

$$d = c \times \frac{2^n}{1 + 2^n}$$

$$e = d \times \frac{2n}{1 + 2^n}$$

Corollarium 3.

Poteſt quis priuſquam ludus inchoetur in ſe ſuſcipere, ut ſummam $n+1$ de qua colluſores contendunt, & mulctas omnes pendat, ſi ſibi initio in manus datum ſit $n + 1 + 2^n - 1 \times p$.

Demonſtrationem duorum præcedentium corollariorum curioſis indagandam relinquo.